√

Métodos Numéricos

2do Cuatrimestre 2024

1er Parcial (27/09/2024)

DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Nombre y Apellido: [redacted]

Libreta Universitaria: [redacted]

Total de hojas entregadas (sin enunciado):

1) 2 2) 1 3) 1 4) 2

Puntajes por resolución de ejercicios y condiciones generales de corrección				
Ej. 1 26	Ej. 2 16	Ej. 3 20	Ej. 4 25	Final 87
El examen se aprueba con 60 puntos. Resolver los ejercicios en hojas separadas. Incluir LU y nombre en hojas y enunciado.		**Justificar <u>todas</u> las respuestas** Puede hacerlo citando resultados de la teórica o la práctica. Para ejercicios de la guía, consulte.		

Ejercicio 1 (26 puntos). Sean $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ t.l. definidas por las matrices A y B respectivamente. Consideramos la t.l. $f \bullet g: \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ definida como $(f \bullet g)(x, y) = (f(x), g(y))$[1].

a) (8 puntos) Escribir la matriz M asociada a la transformación lineal $f \bullet g$ y describir los elementos de $Im(f \bullet g)$ y $Nu(f \bullet g)$ en términos de los elementos de las imágenes y los núcleos de f y g.

b) (10 puntos) Probar que si $n < m$ entonces $det(M) = 0$. Concluir que si $n \neq m$ entonces $det(M) = 0$.

c) (8 puntos) Sea $T: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una t.l. tal que $T(e_4) = (0, 0, 2, 3, 0)$, $T(e_5) = (0, 0, 0, -3, 1)$ y su matriz M es triangular superior. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre M para que exista $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T = f \bullet g$, con $g(e_1) = (2, 3, 0)$ y $g(e_2) = (0, -3, 1)$.
Deducir que $rg(T) \geqslant 3$ si no existe tal f.

Ejercicio 2 (26 puntos). Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible y $PA = LU$ la descomposición LU con pivoteo parcial. Probar que:

a) (8 puntos) $\|PA\|_\infty = \|A\|_\infty$ y $\|(PA)^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}\|_\infty$.

b) (8 puntos) $\|Le_i\|_\infty = 1$ para cualquier $1 \leqslant i \leqslant n$.

c) (10 puntos) $|u_{ii}^{-1}| \leqslant \|A^{-1}\|_\infty$. Concluir que $\dfrac{\|A\|_\infty}{\min_i |u_{ii}|} \leqslant \kappa_\infty(A)$.
Sugerencia: Demostrar que $|x^t y| \leqslant \|x\|_1 \|y\|_\infty$ y reescribir u_{ii} como el p.i. entre dos ciertos vectores.

Ejercicio 3 (20 puntos).

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva y la función $\phi(\lambda) = (x + \lambda y)^t A (x + \lambda y)$ dados $x, y \in \mathbb{R}^n$.

a) (6 puntos) Escribir a ϕ como polinomio cuadrático y calcular su discriminante.

b) (7 puntos) Probar que si x e y son linealmente independientes, entonces $|x^t Ay| < \sqrt{x^t Ax}\sqrt{y^t Ay}$.

c) (7 puntos) Probar que si x e y son linealmente dependientes, entonces $|x^t Ay| = \sqrt{x^t Ax}\sqrt{y^t Ay}$.

Ejercicio 4 (28 puntos). Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $A = GR$ la factorización QR construida exclusivamente con matrices de Givens.

a) (10 puntos) Si $det(A) \neq 0$, probar que el elemento r_{nn} de R tiene el mismo signo que $det(A)$.

b) (10 puntos) Si $det(A) < 0$ hallar la matriz de Householder H donde $Q = GH$ es la matriz ortogonal de la factorización QR tal que los elementos de la diagonal de R son positivos.

c) (8 puntos) Dar un ejemplo de matriz ortogonal $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $n > 2$, que no sea ni de Givens ni de Householder. *Sugerencia: Hallar una matriz ortogonal Q no simétrica tal que $det(Q) \neq 1$.*

[1] (x, y) es un abuso de notación para notar al vector de $\mathbb{R}^{n+m}$ cuyas primeras n coordenadas son las de $x \in \mathbb{R}^n$ y las últimas m son las de $y \in \mathbb{R}^m$. Lo mismo sucede con $(f(x), g(y)) \in \mathbb{R}^{m+n}$, $f(x) \in \mathbb{R}^m$ y $g(y) \in \mathbb{R}^n$.

EJ1 [redacted] B/B/B

a)

A matriz asociada a $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

B matriz asociada a $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Sea M la matriz asociada a la TL $F \bullet g: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{m+n}$

$M \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (n+m)}$

$$M = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} & \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \\ \begin{array}{cc} n & m \end{array} & \end{array}$$ ✓

Veamos que al hacer el producto $M \cdot (X, Y)$ para $X \in \mathbb{R}^n$, $Y \in \mathbb{R}^m$ obtenemos $(F(x), g(y))$

$$M \cdot (X, Y) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = (Ax + 0y, 0X + By) = (Ax, By) = (F(x), g(y))$$

A y B son las matrices asociadas a F y g respectivamente.

$$Im(F \bullet g) = Im(M) = \{(z_1, z_2) : M \cdot (X, Y) = (z_1, z_2)\}$$

$$(z_1, z_2) = M \cdot (X, Y) = (F(x), g(y)) \iff z_1 = f(x) \wedge z_2 = g(y)$$

$$\iff z_1 = Ax \wedge z_2 = By$$

$$\iff z_1 \in Im(A) \wedge z_2 \in Im(B)$$ ✓

Los vectores (z_1, z_2) en $Im(F \bullet g)$ se construyen tomando $z_1 \in \mathbb{R}^n$ de $Im(A)$ y $z_2 \in \mathbb{R}^m$ de $Im(B)$. La TL $F \bullet g$ es una "Falsa" composición. En vez de componer F con g, es una nueva TL que aplica las TL F y g en "paralelo", cada una trabaja sobre distintas partes de los vectores de $\mathbb{R}^{m+n}$.

$$\therefore Im(F \bullet g) = \{(z_1, z_2) : z_1 \in Im(A) \wedge z_2 \in Im(B)\}$$

De forma análoga encontramos $Nu(F \circ g)$.

$Nu(F \circ g) = Nu(M) = \{(x,y) : M \cdot (x,y) = 0\}$

$$\begin{aligned} M \cdot (x,y) = 0 &\iff (F(x), g(y)) = 0 \\ &\iff F(x) = 0 \wedge g(y) = 0 \\ &\iff Ax = 0 \wedge By = 0 \\ &\iff x \in Nu(A) \wedge y \in Nu(B) \end{aligned}$$

$\therefore Nu(F \circ g) = \{(z_1, z_2) : z_1 \in Nu(A) \wedge z_2 \in Nu(B)\}$

b)

Si $n < m$ entonces $B \in \mathbb{R}^{n \times m} = \begin{bmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_m \\ | & & | \end{bmatrix}$ con $b_i \in \mathbb{R}^n$ $\forall i = 1 \dots m$

Cada columna b_i de B tiene n elementos y hay $m > n$ columnas. Bx es una combinación lineal de las columnas de B, que genera un vector en $\mathbb{R}^n$. Como hay más columnas que la dimensión del subespacio generado, necesariamente hay columnas LD en B.

Al construir $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ extendemos cada b_i con 0s adelante para tener vectores de $\mathbb{R}^{(m+n)}$. Estos vectores siguen siendo LD porque extenderlos con 0s no agrega información como para que se vuelvan LI.

Entonces: columnas de B LD

$$\begin{aligned} &\Rightarrow Nu(B) \neq \{0\} \\ &\Rightarrow \exists y \neq 0 \text{ tq } By = 0 \end{aligned}$$

Extendemos y a un vector de $\mathbb{R}^{(m+n)}$.

$\tilde{y} = (0, y) \in \mathbb{R}^{(m+n)}$ $\quad M\tilde{y} = (F(0), g(y)) = (0, By) = (0,0)$

$\tilde{y} \neq 0 \wedge M\tilde{y} = 0 \Rightarrow Nu(M) \neq \{0\} \Rightarrow M$ no inversible $\Rightarrow \det(M) = 0$.

EJ1 [redacted]

Si $n > m$ sucede exactamente lo mismo con las columnas de A.

Hay más columnas que filas en A entonces las columnas de A son LD. $\Rightarrow Nu(A) \neq \{0\}$

$\Rightarrow \exists x \neq 0$ tq $Ax = 0$

Extendemos x como antes: $\tilde{x} = (x, 0) \in \mathbb{R}^{(n+m)}$

$M\tilde{x} = (F(x), g(0)) = (Ax, 0) = (0,0)$

$\tilde{x} \neq 0 \wedge M\tilde{x} = 0 \Rightarrow Nu(M) \neq \{0\} \Rightarrow M$ no inversible $\Rightarrow det(M) = 0$

$\therefore$ Luego si $n \neq m$ entonces $det(M) = 0$

c)

$T(e_4)$ y $T(e_5)$ nos devuelve las columnas 4 y 5 de T.

Sabiendo que M es tri. sup:

$$M = \begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{*} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ $\rightarrow$ tiene que ser 0 para que exista F

Para que exista $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tq $T = F \circ g$ con $g(e_1) = (2,3,0)$, $g(e_2) = (0,-3,1)$

Necesitamos respetar la estructura de bloques descripta en el inciso d). $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ con $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Puntualmente, basta pedir que $M_{33} = 0$ para respetar el bloque 0 abajo de la matriz asociada a la TL F : A. Luego siempre va a existir una F TL, $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ para completar la M. ✓

Si no existe tal F entonces $M_{33} \neq 0$.

Veamos que las Filas 3, 4 y 5 de M son LI.

$\alpha_1 (0,0,M_{33},2,0) + \alpha_2 (0,0,0,3,-3) + \alpha_3 (0,0,0,0,1) = 0$

$\Leftrightarrow (0,0,\alpha_1 M_{33}, 2\alpha_1 + 3\alpha_2, -3\alpha_2 + \alpha_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 M_{33} = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow & \alpha_1 M_{33} = 0 & \Leftrightarrow & \alpha_1 = 0 \text{ pues } M_{33} \neq 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha_2 = 0 & & \\ \Leftrightarrow & \alpha_3 = 0 & & \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Filas 3, 4, 5 son LI

$\Rightarrow$ rango(M) = rango$(T) \geq 3$ si no existe F.

EJ2 [redacted]

a)

P es una matriz de permutación. PA reordena las filas de A porque P multiplica izquierda. Como $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \|Fila_i(A)\|_1$, al permutar las filas en PA éstas mantienen su norma 1 (P no altera las filas, sólo las mueve de posición), entonces resultará que $\|PA\|_\infty$ es igual $\|A\|_\infty$.

ej de la práctica

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \overset{\downarrow}{=} \max_{1\leq i\leq n} \|Fila_i(A)\|_1 = \max_{1\leq i\leq n} \|Fila_{P(i)}(A)\|_1 = \|PA\|_\infty$$

$P(i)$ es la función de permutación asociada a la matriz P.

$\forall i=1..n.\ P(i)=j \iff Fila_i(P) = e_j$

Básicamente $P(i)$ nos dice a dónde se permutó la fila i-ésima.

b)

Como A y P son inversibles: $(PA)^{-1} = A^{-1}P^{-1}$ P^{-1} sigue siendo una matriz de permutación. Pero ahora multiplica a derecha a A. Entonces permuta las columnas de A. El argumento es similar al inciso a). Al permutar las columnas de A, la norma 1 de las filas se mantiene igual ya que la suma (en el cálculo de la norma 1) es conmutativa. Podemos sumar los elementos de la fila en cualquier orden que el resultado será igual.

$$\|(PA)^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}P^{-1}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \|Fila_i(A^{-1}P^{-1})\|_1 = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |(A^{-1}P^{-1})_{ij}|$$

$$= \max_{1\leq i\leq n} \sum_{k=1}^{n} |a^{-1}_{ik}| = \|A^{-1}\|_\infty$$

$(A^{-1}P^{-1})_{ij} = a^{-1}_{ik}$ para algún $1\leq k\leq n$ en función de j definido por la matriz de permutación P^{-1}.

b) QVQ: $\|Le_j\|_\infty = 1 \quad \forall j=1 \dots n$

$$Le_j = col_j(L) \Rightarrow \|Le_j\|_\infty = \|col_j(L)\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\underbrace{col_j(L)_i}_{\text{elemento } i,j \text{ de } L}| = \max_{1\leq i\leq n} |L_{ij}|$$

Entonces lo que realmente queremos ver es que el máximo elemento en módulo de cada columna de L es 1.

QVQ: $\max_{1\leq i\leq n} |L_{ij}| = 1 \quad \forall j=1 \dots n$

$PA = LU \Rightarrow L$ es triangular inferior con 1s en la diagonal.

QVQ: $\max_{1\leq i\leq n-j} |L_{ij}| \leq 1$

Es decir: todos los elementos debajo de la diagonal de L tienen que ser en módulo ≤ 1. Como es una descomposición LU con pivoteo parcial (por filas), sabemos que en cada paso de la factorización LU pivoteamos las filas para obtener el máximo elemento en la diagonal y así conseguir un multiplicador para cada fila con el denominador más grande posible. Esto nos permitirá afirmar que todos los multiplicadores de la factorización LU (los elementos debajo de la diagonal de L) son ≤ 1.

L_{ik} se define en el paso k de la factorización ~~xxxxx~~ $\forall i > k$

$L_{ik} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$

Por el pivoteo: $|a_{kk}^{(k-1)}| \geq |a_{ik}^{(k-1)}| \quad \forall i > k$

$\Rightarrow |L_{ik}| \leq 1 \quad \forall i > k$

Como L tri. inf $\Rightarrow \quad |L_{ij}| \leq 1 \quad \forall i,j \Rightarrow \max_{1\leq i\leq n} |L_{ij}| = 1 \quad \forall j=1 \dots n$

$$\Rightarrow \|Le_j\|_\infty = 1 \quad \forall j=1 \dots n$$

Ej 3 [redacted]

TOTAL=20

$\phi(X) = (x+\lambda y)^T A (x+\lambda y)$ A sdp

a)

$(x+\lambda y)^T A (x+\lambda y)$

$= (x^T+\lambda y^T)(Ax+\lambda Ay)$

$= x^TAx + \underbrace{\lambda x^TAy + \lambda y^TAx} + \lambda^2 y^TAy$ A simétrica: $A=A^T$

Aux: $y^TAx = y^T(x^TA^T)^T = (x^TA^Ty)^T = (x^TAy)^T = x^TAy$

$(x^TAy)^T \in \mathbb{R}$ es un número

$= x^TAx + 2\lambda x^TAy + \lambda^2 y^TAy$

Es un polinomio cuadrático en función de λ.

6

$\Delta = (2x^TAy)^2 - 4y^TAy\,x^TAx$

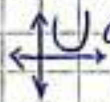
$= \boxed{4(x^TAy)^2 - 4(y^TAy)(x^TAx)}$

b) QVQ: x, y LI $\Rightarrow |x^TAy| < \sqrt{x^TAx}\sqrt{y^TAy}$

Consideremos la combinación lineal $x+\lambda y \neq 0$ (porque x,y LI y el coeficiente de x es 1). Como A es sdp $\Rightarrow (x+\lambda y)^TA(x+\lambda y) > 0$.

Por el inciso a) ya vimos que eso es un polinomio cuadrático.

~~Entonces basta ver que φ(x) no tiene raíces, y como su coeficiente principal: yᵀAy > 0 ∀y≠0 (A sdp), podemos decir que φ(x) > 0~~

Entonces $(x+\lambda y)A^T(x+\lambda y) > 0 \Leftrightarrow \Delta$ de $\phi(\lambda) < 0$ (no tiene raíces). Es decir:  $\phi(\lambda)$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 4(x^TAy)^2 - 4(y^TAy)(x^TAx) < 0$

$\Leftrightarrow (x^TAy)^2 < (y^TAy)(x^TAx)$

$\Leftrightarrow |x^TAy| < \sqrt{y^TAy}\sqrt{x^TAx}$ $\left.\begin{matrix} y^TAy > 0 \\ x^TAx > 0 \end{matrix}\right\}$ A sdp

7

$\therefore |x^TAy| < \sqrt{x^TAx}\sqrt{y^TAy}$ si x,y LI

c) QVQ: X, Y LD $\Rightarrow |X^TAY| = \sqrt{X^TAX}\sqrt{Y^TAY}$

~~Si X,Y LD entonces podemos escribir X en función de Y.~~

$\cancel{X = \lambda Y}$

$\cancel{A \text{ sdp} \Leftrightarrow (\lambda Y)^T A (\lambda Y) > 0 \quad \forall (\lambda Y) \neq 0}$

$\cancel{\Leftrightarrow \lambda^2 Y^TAY > 0}$

Como X, Y LD podemos escribir Y en función de X.

$Y = \alpha X$ con $\alpha \neq 0$

Usando el inciso b)

$|X^TAY| \overset{?}{=} \sqrt{X^TAX}\sqrt{Y^TAY}$ Vale si los pasos son $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |X^TA(\alpha X)| \overset{?}{=} \sqrt{X^TAX}\sqrt{(\alpha X)^TA(\alpha X)}$

$\Leftrightarrow |\alpha||X^TAX| \overset{?}{=} \sqrt{X^TAX}\sqrt{\alpha^2 X^TAX}$ 7

$\Leftrightarrow |\alpha||X^TAX| \overset{?}{=} |\alpha|\left(\sqrt{X^TAX}\right)^2$ ✓

$\Leftrightarrow |X^TAX| \overset{?}{=} X^TAX$

$\Leftrightarrow X^TAX \overset{?}{=} X^TAX$ $\quad |X^TAX| = X^TAX$ porque A sdp $\Rightarrow X^TAX > 0$

$\therefore |X^TAY| = \sqrt{X^TAX}\sqrt{Y^TAY}$ si X, Y LD

NOTA

EJ 4 [redacted]

a)

G es una matriz ortogonal construida a partir de productos de matrices de Givens. Como una Matriz de Givens tiene $\det = 1$,

$G = G_k \cdots G_1 \Rightarrow \det(G) = \det(G_k) \cdots \det(G_1) = 1 \cdots 1 = 1.$ ¿por qué?

$A = GR \Rightarrow \det(A) = \det(GR) = \overset{1}{\det(G)} \cdot \det(R) = \det(R)$

$\Rightarrow \det(A) = \det(R) = \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$ porque R tri sup.

QVQ: $\det(A)$ y r_{nn} tienen el mismo signo

En cada paso de la Factorización QR usamos una matriz de Givens para colocar un 0 en alguna posición debajo de la diagonal. Al mismo tiempo, ponemos en la diagonal de R la norma del vector rotado. Como es una norma es ≥ 0, y en este caso es > 0 ya que $\det(A) \neq 0$ (entonces $\det(R) \neq 0$).

Pero el elemento r_{nn} nunca lo tocamos. No obstante, podemos ver que tiene el mismo signo que $\det(A)$.

Caso $\det(A) > 0$: $\det(R) > 0$

$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} r_{ii} > 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\prod_{i=1}^{n-1} r_{ii}}_{} \cdot r_{nn} > 0$

⊛ $r_{ii} > 0 \ \forall i = 1..n-1$

$\Leftrightarrow r_{nn} > 0$

Caso $\det(A) < 0$: $\det(R) < 0$

$\Leftrightarrow \underset{⊛}{\prod_{i=1}^{n-1} r_{ii}} \cdot r_{nn} < 0$

$\Leftrightarrow r_{nn} < 0$

B-

b)

Por inciso a) si $\det(A) < 0 \Rightarrow r_{nn} < 0$ ($y\ r_{ii} > 0\ \forall i = 1 \ldots n-1$).

Tenemos que invertir el signo de r_{nn}.

Propuesta: $H = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$

QVQ: Invierte el signo de r_{nn}.

$$HR = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & r_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & -r_{nn} \end{bmatrix} \quad r_{nn} < 0 \Rightarrow -r_{nn} > 0$$

QVQ: H es ortogonal

~~Por ejemplo~~ H tiene como columnas los vectores canónicos $e_1 \cdots e_{n-1}$ y luego $-e_n$. Todos estos vectores son ortonormales pues $\|\pm e_j\|_2 = 1\ \forall j$ y además $\pm e_j \perp \pm e_i\ \forall j, i$.

Luego H es ortogonal. También porque $H^{-1} = H^T$.

QVQ: H es una matriz de Householder

$H = I - 2uu^T$ para algún u tq $\|u\|_2 = 1$

$$H = I - 2uu^T \iff 2uu^T = I - H = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$\iff uu^T = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Tomamos $u = e_n = (0 \cdots 0\ 1)$ $\quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [0 \cdots 0\ 1] = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = uu^T$

~~Luego H = I - 2uu^T co~~

Luego $H = I - 2e_ne_n^T$ es la matriz buscada.

NO

$A = \underbrace{GH}_{Q}R = QR$ $\quad$ $Q = GH$ ortogonal por ser producto de ortogonales

X

A = GR = GIR = GHHR

B^-

E) 4 [redacted]

c)

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Q no es simétrica $\Rightarrow$ Q no es Householder

$$\det(Q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \pm \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1)\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \neq 1$$

$\det(Q) \neq 1 \Rightarrow$ Q no es Givens

Columnas de Q ortonormales $\Rightarrow$ Q ortogonal.